Urquhart-style semantics
for u-weakly-associative semilinear logics
u-약결합 준선형 논리에 대한 어쿼트형 의미론

Eunsuk Yang(양은석, 전북대학교 철학과)
Yeonhong Kim(김연홍, 전북대학교 철학과 석사과정)

2024. 8. 13. 한국논리학회 여름 정기학술대회

TOC

1. Warming-up & Introduction

$$\underset{\text{1) relational semantics}}{\underline{\text{U.-style semantics}}} \text{ for } \underset{\text{2) substructural logics}}{\underline{u\text{-weakly-associative}}} \; \underset{\text{3) fuzzy logic}}{\underline{\text{semilinear}}} \text{ logics}$$

Classical concept of conjunction

참 진리값을 1, 거짓 진리값을 0 이라고 하자.

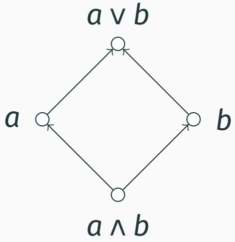
($0 < 1$ 임을 사용한다.)

그러면,

$$\begin{aligned} v(A \wedge B) = 1 \quad & \text{if and only if} \quad v(A) = 1 \text{ and } v(B) = 1, \\ & \text{if and only if} \quad \min\{v(A), v(B)\} = 1. \end{aligned}$$

Classical concept of conjunction

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0



- $\wedge$는 둘 중 작은 값을($\vee$는 둘 중 큰 값을) 돌려준다
- $\wedge$($\vee$)의 값은 항상 정의될 수 있다

$\Rightarrow$ 교meet(합join) 연산을 갖는 속/격자lattice 대수구조 형성

Basic algebraic properties of meet/join

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \qquad \text{(assoc.)}$$

$$A \wedge B = B \wedge A \qquad \text{(comm.)}$$

$$A \wedge A = A \qquad \text{(idem.)}$$

AND SO ON

"I heard a shot *and* I saw the girl fall."*

"저는 총소리를 들었고 여자아이가 떨어지는 것을 보았습니다."

* Hodges, W. (1983), 'Elementary predicate logic', in *Handbook of philosophical logic*, Vol. 1, Springer Netherlands, 1-129.

"I saw the girl fall *and* I heard a shot."

"저는 여자아이가 떨어지는 것을 보았고 총소리를 들었습니다."

A. 특수한 and의 사용:

and-문이 받아들여질 때, 지시하는 상황의 전체 상태를 변경한다

$$(A \text{ and } B) \not\leftrightarrow (B \text{ and } A).$$

⇒ 비-고전적 and(&)의 도입, 부분구조 논리substructural logic의 출현

$$\underbrace{(A \,\&\, (B \,\&\, C) \,\&\, \cdots \,\&\, D)}_{\text{Intensional conjunction, multiplicative conjunction/tensor, fusion, } \cdots} \implies P$$

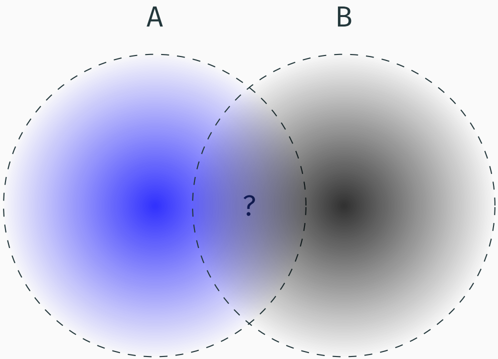
Basic structural rules

- a: $(A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C)) \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C)$
- e: $A \mathbin{\&} B \rightarrow B \mathbin{\&} A$
- i: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- o: $\overline{0} \rightarrow A$
- c: $A \rightarrow A \mathbin{\&} A$
- p: $A \mathbin{\&} A \rightarrow A$

t-weakly associative logics(2016–)

- $((A_{\mathbf{t}} \,\&\, B_{\mathbf{t}}) \,\&\, C_{\mathbf{t}}) \leftrightarrow (A_{\mathbf{t}} \,\&\, (B_{\mathbf{t}} \,\&\, C_{\mathbf{t}}))$ (wAS$_{\mathbf{t}}$)
- $((A \,\&\, B) \,\&\, C)_{\mathbf{t}} \leftrightarrow (A \,\&\, (B \,\&\, C))_{\mathbf{t}}$ (AS$_{\mathbf{t}}$)
- $((A_{\mathbf{t}} \,\&\, B) \,\&\, C) \leftrightarrow (A_{\mathbf{t}} \,\&\, (B \,\&\, C))$ (sAS$_{\mathbf{t}}$)

Fuzzy intersection



Core properties of fuzzy logics

- $v(A) \in [0, 1]$.
- $\sup(x \circ v(B)) = x \circ \sup v(B)$. (cont.$_L$)
- $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$. (PL$_{\text{prelinearity}}$)

- 대수 의미론algebraic semantics
  ⇒ 문장의 의미는 대수구조의 원소,

  $$\text{“}A\text{가 해석함수 } v \text{ 하에서 참이다”} \text{ iff } (v(A) = \mathbf{T}).$$

  '참'에 해당하는 의미에, 대수적 연산을 통해 도달할 수 있다.
- 관계 의미론relational semantics
  ⇒ 문장의 의미는 관계에 의해 제약된 정보 상태의 구성요소,

  $$\text{“}A\text{가 상태 } s\text{에서 참이다”} \text{ iff } (s \Vdash A).$$

  상태 s의 정보를 A가 구성한다.

Algebraic semantics of substructural logics: residuated lattice

- 잔여성residuation property:

  $$(a \circ b) \leq c \text{ iff } b \leq (a \to c)$$

  함축문의 의미는 퓨전에 대하여 정의된다. ($\wedge$가 아니라!)

- 잔여residuum $\to$:

  의미구조 상에서 순서관계를 추상화하는 특수한 함수

- Kripke-style semantics:
  직관주의 논리의 의미론, 정보 상태 사이의 접근가능성만 고려($\to_{R_K}$)

$$a \Vdash (A \to B) \text{ iff } (b \Vdash A \Rightarrow\ b \Vdash B), \text{ for all } b \text{ s.t. } a\ R\ b.$$

- Routley-Meyer-style semantics:
  연관 논리의 의미론, 접근가능성 관계를 삼항관계 $R\,abc$로 확장
- Urquhart-style semantics:
  정보 결합 연산의 도입, 삼항관계를 이항관계와 연산으로 분리($\to_{\circ_U}$)

$$a \Vdash (A \to B) \text{ iff } (b \Vdash A \Rightarrow\ b \circ a \Vdash B), \text{ for all } b.$$

퓨전의 의미를 설계하기 용이

2. Preliminaries

Syntax of $u$wa-semilinear logics

- UWAL은 **MICAL**의 확장 체계다. **MICAL**은,
  - 동일률(SI),
  - 격자구조의 성질($\wedge/\vee$의 도입/제거 규칙군),
  - 구조 규칙(EF, &-C, PP),
  - 퓨전의 성질(&-Adj, &$\wedge$),
  - 함축을 사용한 추론의 성질(Res′, T′)과 추론 규칙(mp, adj_u, α, β),
  - 그리고 PL을 공리로 갖는다.

    $\Rightarrow$ 핵심은 $(\alpha \to \beta)_{\mathbf{t}} \vee (\beta \to \alpha)_{\mathbf{t}}$

  공리가 복잡하게 나오는 이유는 결합법칙이 성립하지 않기 때문
- &, ⅋, $\wedge$, $\vee$에 상응하는 항등원 **t**, **f**, $\top$,$\bot$이 정의된다

Syntax of *u*wa-semilinear logics

- UWAL은 세 가지 약결합성과 추가적인 공리들을 갖는다:
  - $\mathbf{WA_UBUL}$: $\mathrm{wAS_U}$, U-RUN, $\mathrm{RDIV_U^w}$
  - $\mathbf{A_UBUL}$: $\mathrm{AS_U}$, $\mathrm{A_U}$, U-RUN, $\mathrm{RDIV_U^w}$
  - $\mathbf{SA_UBUL}$: $\mathrm{sAS_U}$, $\mathrm{A_U}$, U-RUN, $\mathrm{RDIV_U^w}$
- $\mathbf{SA_UBUL}$은 $\mathbf{A_UBUL}$을, $\mathbf{A_UBUL}$은 $\mathbf{WA_UBUL}$을 함축한다
- $\mathrm{A_U}$, U-RUN, $\mathrm{RDIV_U^w}$가 추가된 이유는, 기준점이 **t**가 아니기 때문
- 여기에 결합성등 공리를 추가하면, 기본 유니놈 논리(**BUL**)

Axioms U-RUN, $\mathrm{RDIV}^{w}_{\mathrm{U}}$ and A_{U}

다루는 문장들의 진리치가 U의 진리치보다 작을 때 일어나는 현상

- U-RUN: U는 항등원으로 기능

$$\alpha_U \rightarrow (\alpha_U \mathbin{\&} U)$$

- $\mathrm{RDIV}^{w}_{\mathrm{U}}$: 문장 β보다 α의 진리치가 크다면,
  α에 $\alpha \rightarrow \beta$를 퓨전해 진리치를 β가 되도록 깎을 수 있음

$$(U \rightarrow \alpha) \vee (\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow (\alpha \mathbin{\&} (\alpha \rightarrow \beta)))$$

- A_{U}: 문장을 퓨전에서 단독으로 분리 가능

$$(\alpha_U \mathbin{\&} \beta) \rightarrow \alpha_U$$

⇒ 단, 어디까지나 U라는 기준점 내의 문장들만

Algebraic semantics of UWALs

대수적 의미론의 기본 발상:

⇒ 논리체계의 구성요소를 대수구조의 원소에 대응시킨다

P	$\top$	$\bot$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{f}$	$\wedge$	$\vee$	$\to$ ($\vdash$)	$\leftrightarrow$	$\&$	U
$vA(P)$	$\top$	$\bot$	i	j	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$ ($\leq$)	$=$	$\circ$	u

Def.3 & Def.4: MICAL-algebra and UWAL-algebra

(ii) **MICAL**-대수는 (PL^S)를 만족하는 bpcrlu-groupoid다.

(iii) UWAL-대수는 상응하는 대수적 조건을 만족하는 **MICAL**-대수다.

- 논리 체계에서 핵심은 도출과 증명
  $\Rightarrow$ 대수적 의미론에서는 이를 연산과 순서관계로 바꿈
- UWAL-대수는 (PL^S) 대신 선형순서를 조건으로 넣어도 됨
  $\Rightarrow$ 준선형 논리들의 공통 특성(선형 확대가능성, LEP)

Value assignment for UWALs

Def 5: Value assignment

- 진리할당함수(해석)는 문장에서 UWAL-대수로의 준동형사상이다.

Def 6: Semantic consequence
UWAL- 대수 하에서,

- 모든 해석마다 $i \leq vA(A)$일 때, 문장 A는 타당하다valid/tautology.
- 문장(집합)을 참으로 만드는 해석이 그 문장(집합)의 모형이다.
- Δ의 모형이 α도 참으로 만들면, α는 Δ의 의미론적 귀결이다.

Remark

- 대수적 의미론은 건전하고 완전하다.[Y24]

3. Urquhart-style semantics

어쿼트형 의미론의 기본 얼개

- 대수적 의미론이 완전하다는 사실은 이미 밝혀졌다

⇒ 어쿼트형 의미론을 정의할 때, 대수적 의미론의 성질을 보존하도록 설계한다
즉, 다루는 기본 구조가 UWAL-대수가 되도록 정의한다

- 완전성도 마찬가지 전략을 취한다

⇒ 어쿼트형 의미론을 대수적 의미론으로 환원할 수 있음을 보인다

Def.8 & Def. 9: MICAL frame and UWAL frame

(v) **MICAL** 프레임은 다음 조건을 만족하는 $(UF, \leq, \bot, \top, i, j, \circ)$다:

- $(UF, \bot, \top, \leq)$는 bounded linear order,
- $j \in UF$,
- $(UF, \circ, i)$는 commutative unital groupoid,
- $\bot \circ \top = \bot$,
- $\sup_{i \in I} a_i$가 있다면, $a \circ \sup_{i \in I} a_i = \sup_{i \in I}(a \circ a_i)$,
- $a \Rightarrow b := \sup\{c | a \circ c \leq b\}$가 항상 정의된다.

- UWAL 프레임은 상응하는 프레임 조건을 만족하는 **MICAL** 프레임이다.

Remarks

- 관계 $\leq$가 기본적으로 순서관계
  $\Rightarrow$ 직관주의보다 강한 제약이 걸린 논리체계의 프레임으로 사용 가능
- 선형순서라는 제약이 주어짐으로써 (PL)을 참으로 만들 수 있음
- 마찬가지로, 선형순서라는 제약 덕에 $\wedge/\vee$ 대수적으로 정의 가능
- left-continuous 조건으로 인해 단조성 성립:

$$a \leq b \Rightarrow a \circ c \leq b \circ c.$$

- $\bot \circ \top = \bot$조건은 달리 말하면,

$$\bot \circ a = \bot \text{ for all } a.$$

  (Lemma 1 참조)

Forcing relation

MICAL 프레임 상의 forcing relation에 주어지는 특이 사항:

- $a \Vdash \alpha \to \beta$는 groupoid operation을 통해 정의됨:

$$(b \Vdash \alpha \Rightarrow b \circ a \Vdash \beta) \text{ for all } b.$$

- $a \Vdash \alpha \& \beta$는 합성되는 두 상태가 각각 α, β를 강제함을 의미:

$$\exists b, c, \text{ s.t. } (a \leq b \circ c, b \Vdash \alpha, \text{ and } c \Vdash \beta.)$$

- 현 정보 상태 a의 이전 상태들 $x \in \downarrow a$의 정보를 모두 보존(HC)
- 한 프레임에서 문장 α가 참임은, $i \Vdash \alpha$를 의미.

UWAL 프레임은, 각 문장마다 강제하는 최대값 상태 $\max\{a\}$가 정의된다.

Lemma 3.

우선 기준점인 U에 대해 성립하는 성질을 보인다:

$$a \Vdash U \text{ iff } a \leq u.$$

Proof.

$$\begin{aligned} a \Vdash \top \to \mathbf{t} \text{ iff } \quad & \forall b, b \Vdash \top \Rightarrow b \circ a \Vdash \mathbf{t} \\ {}^{*}\text{iff } \quad & \top \circ a \Vdash \mathbf{t} \\ \text{iff } \quad & \top \circ a \leq i \\ \text{iff } \quad & a \leq \top \Rightarrow i. \end{aligned}$$

□

Proposition 2. Soundness

$$\Delta \vdash \alpha \Rightarrow \Delta \models \alpha.$$

건전성 증명의 핵심은, 연역의 길이에 대한 귀납법을 사용하는 것.

- 공리가 진리를 보존하고,
- 추론규칙이 진리를 보존함을 보인다

$\Rightarrow$ 우리의 경우, **MICAL** 에서 확장한 공리들의 진리 보존만 보임

Proof example: U-RUN

$$
\begin{aligned}
a \Vdash \alpha_U \text{ iff } \quad & a \Vdash \alpha \text{ and } a \Vdash U \\
\text{iff } \quad & a \Vdash \alpha \text{ and } a \le u && \text{(Lemma 3)} \\
\Rightarrow \quad & a = a_u \le a_u \circ u. && (\text{U-RUN}^S)
\end{aligned}
$$

그런데 $u \le u$ 이므로, $u \Vdash U$ 이고 따라서 $a \Vdash \alpha_U \,\&\, U$.

$\Rightarrow$ 나머지 증명도 비슷합니다.

RDIV$^{W}_{\mathrm{U}}$ 의 경우 조금 더 까다롭지만, 여전히 기본 발상은 같습니다.

완전성 증명의 개요

- **MICAL**의 완전성 증명은 이미 이루어졌다[Y18,Y19]
- 주요 발상은, (i) **MICAL** 프레임을 **MICAL** 대수구조로 환원하고, (ii) **MICAL** forcing을 **MICAL** 진리할당으로 변환하는 것
- 동일한 접근이 UWAL에도 가능하다

⇒ 할 작업은 오직 (i)을 UWAL 프레임과 대수구조에 대해 확인하는 것

Proposition 3.

(i) 완비 UWAL 프레임은 완비 선형 UWAL 대수
(ii) 모든 UWAL 프레임은 UWAL 대수
(iii) UWAL 어퀴트형 모형을 축소해 얻은
선형 UWAL 대수 상의 진리할당은 다음 관계를 갖는다:

$$a \Vdash \alpha \quad \text{iff} \quad a \leq vA(\alpha).$$

(iv) 사실, $\max\{a \mid a \Vdash p\}$가 $vA(p)$와 동일하다.

개별 문장에 (iii)이 성립하는지는, **MICAL**과 동일하게 증명할 수 있다

마지막 과제는, Proposition 3을 증명하는 과정에서 얻은 프레임이 UWAL 프레임이 맞는지 확인하는 것 뿐

Proposition 4.

UF가 UWAL 프레임이고,

각 공리 (Ax)에 상응하는 프레임 조건을 $(Ax)_{UF}$ 라고 하자.

그러면 다음이 성립한다.

$$UF \models (Ax) \quad \text{iff} \quad \text{프레임 조건 } (Ax)_{UF} \text{ 가 성립.}$$

Proof of Proposition 4.

증명에 앞서, 다음 사실을 확인하자.

$\alpha^\circ := \max\{a \in UF \mid a \Vdash \alpha\}$라 두자. 그러면,

(i) $(\alpha \to \beta)^\circ = \alpha^\circ \Rightarrow \beta^\circ$이고,

(ii) $(\alpha \,\&\, \beta)^\circ = \alpha^\circ \circ \beta^\circ$.

Proof example: A_U^S

정방향(⇒)은 대우로, 역방향(⇐)은 직접증명한다. 즉,

(i) UF 에서 A_U^S 가 성립하지 않는다면, $UF \not\models A_U$.

⇒ 즉, $i \nVdash A_U[p/\alpha, q/\beta]$의 사례 문장 p, q 를 찾아낸다.

(ii) UF 에서 A_U^S 가 성립한다면, $UF \models A_U$.

⇒ 즉, A_U^S 가 성립하는 UF 에서, $i \Vdash A_U$ 임을 보인다.

LtR-proof

UF 에서 A_U^S 가 성립하지 않는다고 하자. 그럼 두 상태 $a, b \in UF$ 가 존재하여,

$$a_u \circ b \not\leq a_u.$$

$p^\circ, q^\circ := a, b$ 로 정의한다.

만약 $i \Vdash p_U \,\&\, q \to p_U$ 였다면, $x \Vdash p_U \,\&\, q$ 가 $x \Vdash p_U$ 를 함축할 것.

$x := a_u \circ b$ 를 선택한다.

$a_u \circ b \Vdash p_U \,\&\, q$ 이므로, $a_u \circ b \Vdash p_U$ iff $a_u \circ b \leq (p_U)^\circ = a_u$.

이는 가정에 위배된다. 따라서 $UF \nVdash A_U$.

RtL-proof

역으로, UF 에서 A_U^S 가 성립한다고 하자. $i \Vdash A_U$ 임을 보여야 하므로,

$a \Vdash \alpha_U \,\&\, \beta$ 로부터 $a \Vdash \alpha_U$ 를 이끌어낸다.

Proposition 3의 증명에 의하여,

$$
\begin{aligned}
a \Vdash \alpha_U \,\&\, \beta \quad & \text{iff} \quad a \leq vA(\alpha_U \,\&\, \beta) = vA(\alpha)_u \circ vA(\beta), \\
& \Rightarrow \quad vA(\alpha)_u \circ vA(\beta) \leq vA(\alpha)_u, \qquad (\mathrm{A}_U^S) \\
& \Rightarrow \quad a \Vdash \alpha_U.
\end{aligned}
$$

따라서, Prop 3을 만족하는 프레임들이 UWAL 프레임임을 보였다.

Theorem 3.

(i) UWAL은 UWAL 프레임 상에서 완전하다.
(ii) UWAL은 완비 UWAL 프레임 상에서 완전하다.

4. Involutive extensions

Involutive extensions of UWALs

UWAL 논리 체계와 UWAL 프레임에 각각 다음 공리와 조건을 추가하면,

누승적involutive 확장이 정의된다.

$\neg\alpha := \alpha \rightarrow \mathbf{f}$, $\neg a := a \Rightarrow j$.

(DNE) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$,

(DNE^S) $\neg\neg a \leq a$.

$\Rightarrow$ Proposition 3과 거의 같은 방식으로, 누승적 확장도 완전하다.

5. Concluding remarks

- [Dunn76]에 따르면, R-mingle 연관 논리에 대한 relational semantics가 정의됨

⇒ weak-associativity가 고려되는 의미론은 고려되지 않음

- [Y17, Y22, Y24]에서는 다른 약결합 논리도 제시됨

⇒ 이들에 대해서도 어궈트형 의미론을 제시할 수 있을 듯 함

감사합니다