

Urquhart-style semantics for u -weakly-associative semilinear logics

u -약결합 준선형 논리에 대한 어퀴트형 의미론

Eunsuk Yang(양은석, 전북대학교 철학과)

Yeonhong Kim(김연홍, 전북대학교 철학과 석사과정)

2024. 8. 13. 한국논리학회 여름 정기학술대회

1. Warming-up & Introduction
2. Preliminaries
3. Urquhart-style semantics
 - 3.1. Definitions
 - 3.2. Soundness
 - 3.3. Completeness
4. Involutive extensions
5. Concluding remarks

1. Warming-up & Introduction

U.-style semantics for *u*-weakly-associative semilinear logics

1) relational semantics

2) substructural logics

3) fuzzy logic

Classical concept of conjunction

참 진리값을 1, 거짓 진리값을 0이라고 하자.

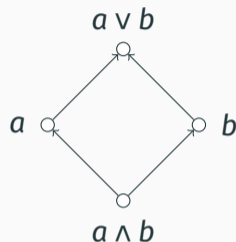
(0 < 1임을 사용한다.)

그러면,

$$\begin{aligned}v(A \wedge B) = 1 & \text{ if and only if } v(A) = 1 \text{ and } v(B) = 1, \\ & \text{if and only if } \min\{v(A), v(B)\} = 1.\end{aligned}$$

Classical concept of conjunction

\wedge	1	0
1	1	0
0	0	0



- \wedge 는 둘 중 작은 값을(\vee 는 둘 중 큰 값을) 돌려준다

- $\wedge(\vee)$ 의 값은 항상 정의될 수 있다

⇒ 교meet(합join) 연산을 갖는 속/격자lattice 대수구조 형성

Basic algebraic properties of meet/join

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \quad (\text{assoc.})$$

$$A \wedge B = B \wedge A \quad (\text{comm.})$$

$$A \wedge A = A \quad (\text{idem.})$$

AND SO ON

"I heard a shot *and* I saw the girl fall."*

"저는 총소리를 들었고 여자아이가 떨어지는 것을 보았습니다."

* Hodges, W. (1983), 'Elementary predicate logic', in *Handbook of philosophical logic*, Vol. 1, Springer Netherlands, 1-129.

"I saw the girl fall *and* I heard a shot."

"저는 여자아이가 떨어지는 것을 보았고 총소리를 들었습니다."

A. 특수한 and의 사용:

and-문이 받아들여질 때, 지시하는 상황의 전체 상태를 변경한다

$$(A \text{ and } B) \Leftrightarrow (B \text{ and } A).$$

⇒ 비-고전적 and(&)의 도입, 부분구조 논리substructural logic의 출현

$$\underbrace{(A \ \& \ (B \ \& \ C) \ \& \ \dots \ \& \ D)} \implies P$$

Intensional conjunction, multiplicative conjunction/tensor, fusion, ...

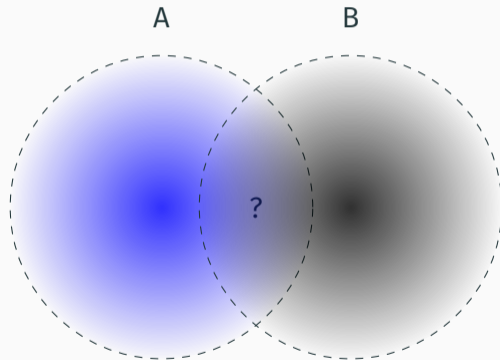
Basic structural rules

- $a: (A \& (B \& C)) \leftrightarrow ((A \& B) \& C)$
- $e: A \& B \rightarrow B \& A$
- $i: A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- $o: \bar{0} \rightarrow A$
- $c: A \rightarrow A \& A$
- $p: A \& A \rightarrow A$

t-weakly associative logics(2016–)

- $((A_t \& B_t) \& C_t) \leftrightarrow (A_t \& (B_t \& C_t))$ (WAS_t)
- $((A \& B) \& C)_t \leftrightarrow (A \& (B \& C))_t$ (AS_t)
- $((A_t \& B) \& C) \leftrightarrow (A_t \& (B \& C))$ (SAS_t)

Fuzzy intersection



Core properties of fuzzy logics

- $v(A) \in [0, 1]$.
- $\sup(x \cdot v(B)) = x \cdot \sup v(B)$.
- $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$.

(cont._L)

(PLprelinearity)

Semantics of a formal system

- 대수 의미론 algebraic semantics
⇒ 문장의 의미는 대수구조의 원소,

“A가 해석함수 v 하에서 참이다” iff ($v(A) = \mathbf{T}$).

‘참’에 해당하는 의미에, 대수적 연산을 통해 도달할 수 있다.

- 관계 의미론 relational semantics
⇒ 문장의 의미는 관계에 의해 제약된 정보 상태의 구성요소,

“A가 상태 s 에서 참이다” iff ($s \models A$).

상태 s 의 정보를 A 가 구성한다.

- 잔여성 residuation property:

$$(a \cdot b) \leq c \text{ iff } b \leq (a \rightarrow c)$$

함축문의 의미는 퓨전에 대하여 정의된다. (\wedge 가 아니라!)

- 잔여 residuum \rightarrow :

의미구조 상에서 순서관계를 추상화하는 특수한 함수

Variants of relational semantics

- Kripke-style semantics:

직관주의 논리의 의미론, 정보 상태 사이의 접근가능성만 고려(\rightarrow_{R_K})

$$a \Vdash (A \rightarrow B) \text{ iff } (b \Vdash A \Rightarrow b \Vdash B), \text{ for all } b \text{ s.t. } a R b.$$

- Routley-Meyer-style semantics:

연관 논리의 의미론, 접근가능성 관계를 삼항관계 $Rabc$ 로 확장

- Urquhart-style semantics:

정보 결합 연산의 도입, 삼항관계를 이항관계와 연산으로 분리($\rightarrow_{\cdot, \cup}$)

$$a \Vdash (A \rightarrow B) \text{ iff } (b \Vdash A \Rightarrow b \cdot a \Vdash B), \text{ for all } b.$$

퓨전의 의미를 설계하기 용이

2. Preliminaries

Syntax of uwa -semilinear logics

- UWAL은 **MICAL**의 확장 체계다. **MICAL**은,
 - 동일률(SI),
 - 격자구조의 성질(\wedge/\vee 의 도입/제거 규칙군),
 - 구조 규칙(EF, $\&$ -C, PP),
 - 퓨전의 성질($\&$ -Adj, $\&\wedge$),
 - 함축을 사용한 추론의 성질(Res', T')과 추론 규칙(mp, adj_u , α , β),
 - 그리고 PL을 공리로 갖는다.
 \Rightarrow 핵심은 $(\alpha \rightarrow \beta)_t \vee (\beta \rightarrow \alpha)_t$

공리가 복잡하게 나오는 이유는 결합법칙이 성립하지 않기 때문

- $\&$, \wp , \wedge , \vee 에 상응하는 항등원 \mathbf{t} , \mathbf{f} , \mathbf{T} , \mathbf{I} 이 정의된다

Syntax of uwa -semilinear logics

- UWAL은 세 가지 약결합성과 추가적인 공리들을 갖는다:
 - **WA_UBUL**: $wAS_U, U\text{-RUN}, RDIV_U^w$
 - **A_UBUL**: $AS_U, A_U, U\text{-RUN}, RDIV_U^w$
 - **SA_UBUL**: $sAS_U, A_U, U\text{-RUN}, RDIV_U^w$
- **SA_UBUL**은 **A_UBUL**을, **A_UBUL**은 **WA_UBUL**을 함축한다
- $A_U, U\text{-RUN}, RDIV_U^w$ 가 추가된 이유는, 기준점이 **t**가 아니기 때문
- 여기에 결합성등 공리를 추가하면, 기본 유니폼 논리(**BUL**)

Axioms U-RUN, RDIV_U^W and A_U

다루는 문장들의 진리치가 U 의 진리치보다 작을 때 일어나는 현상

- U-RUN: U 는 항등원으로 기능

$$\alpha_U \rightarrow (\alpha_U \& U)$$

- RDIV_U^W : 문장 β 보다 α 의 진리치가 크다면,
 α 에 $\alpha \rightarrow \beta$ 를 퓨전해 진리치를 β 가 되도록 깎을 수 있음

$$(U \rightarrow \alpha) \vee (\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow (\alpha \& (\alpha \rightarrow \beta)))$$

- A_U : 문장을 퓨전에서 단독으로 분리 가능

$$(\alpha_U \& \beta) \rightarrow \alpha_U$$

⇒ 단, 어디까지나 U 라는 기준점 내의 문장들만

대수적 의미론의 기본 발상:

⇒ 논리체계의 구성요소를 대수구조의 원소에 대응시킨다

$$\begin{array}{cccccccccccc} P & \top & \perp & \mathbf{t} & \mathbf{f} & \wedge & \vee & \rightarrow (\vdash) & \leftrightarrow & \& U \\ \hline \nu A(P) & \top & \perp & i & j & \wedge & \vee & \Rightarrow (\leq) & = & \cdot & u \end{array}$$

Def.3 & Def.4: MICAL-algebra and UWAL-algebra

- (ii) **MICAL**-대수는 (PL^S) 를 만족하는 bpcrlu-groupoid다.
- (iii) UWAL-대수는 상응하는 대수적 조건을 만족하는 **MICAL**-대수다.
 - 논리 체계에서 핵심은 도출과 증명
⇒ 대수적 의미론에서는 이를 연산과 순서관계로 바꿈
 - UWAL-대수는 (PL^S) 대신 선형순서를 조건으로 넣어도 됨
⇒ 준선형 논리들의 공통 특성(선형 확대가능성, LEP)

Def 5: Value assignment

- 진리할당함수(해석)는 문장에서 UWAL-대수로의 준동형사상이다.

Def 6: Semantic consequence

UWAL-대수 하에서,

- 모든 해석마다 $i \leq vA(A)$ 일 때, 문장 A 는 타당하다(valid/tautology).
- 문장(집합)을 참으로 만드는 해석이 그 문장(집합)의 모형이다.
- Δ 의 모형이 α 도 참으로 만들면, α 는 Δ 의 의미론적 귀결이다.

- 대수적 의미론은 건전하고 완전하다.[Y24]

3. Urquhart-style semantics

- 대수적 의미론이 완전하다는 사실은 이미 밝혀졌다
- ⇒ 어쿼트형 의미론을 정의할 때, 대수적 의미론의 성질을 보존하도록 설계한다
즉, 다루는 기본 구조가 UWAL-대수가 되도록 정의한다
- 완전성도 마찬가지로 전략을 취한다
- ⇒ 어쿼트형 의미론을 대수적 의미론으로 환원할 수 있음을 보인다

Def.8 & Def. 9: MICAL frame and UWAL frame

(v) **MICAL** 프레임은 다음 조건을 만족하는 $(UF, \leq, \perp, \top, i, j, \circ)$ 다:

- (UF, \perp, \top, \leq) 는 bounded linear order,
 - $j \in UF$,
 - (UF, \circ, i) 는 commutative unital groupoid,
 - $\perp \circ \top = \perp$,
 - $\sup_{i \in I} a_i$ 가 있다면, $a \circ \sup_{i \in I} a_i = \sup_{i \in I} (a \circ a_i)$,
 - $a \Rightarrow b := \sup\{c \mid a \circ c \leq b\}$ 가 항상 정의된다.
- UWAL 프레임은 상응하는 프레임 조건을 만족하는 **MICAL** 프레임이다.

Remarks

- 관계 \leq 가 기본적으로 순서관계
⇒ 직관주의보다 강한 제약이 걸린 논리체계의 프레임으로 사용 가능
- 선형순서라는 제약이 주어짐으로써 (PL)을 참으로 만들 수 있음
- 마찬가지로, 선형순서라는 제약 덕에 \wedge/\vee 대수적으로 정의 가능
- left-continuous 조건으로 인해 단조성 성립:

$$a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c.$$

- $\perp \cdot T = \perp$ 조건은 달리 말하면,

$$\perp \cdot a = \perp \text{ for all } a.$$

(Lemma 1 참조)

Forcing relation

MICAL 프레임 상의 forcing relation에 주어지는 특이 사항:

- $a \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ 는 groupoid operation을 통해 정의됨:

$$(b \Vdash \alpha \Rightarrow b \cdot a \Vdash \beta) \text{ for all } b.$$

- $a \Vdash \alpha \ \& \ \beta$ 는 합성되는 두 상태가 각각 α, β 를 강제함을 의미:

$$\exists b, c, \text{ s.t. } (a \leq b \cdot c, b \Vdash \alpha, \text{ and } c \Vdash \beta.)$$

- 현 정보 상태 a 의 이전 상태들 $x \in \downarrow a$ 의 정보를 모두 보존(HC)
- 한 프레임에서 문장 α 가 참임은, $i \Vdash \alpha$ 를 의미.

UWAL 프레임은, 각 문장마다 강제하는 최대값 상태 $\max\{a\}$ 가 정의된다.

Lemma 3.

우선 기준점인 U 에 대해 성립하는 성질을 보인다:

$$a \Vdash U \text{ iff } a \leq u.$$

Proof.

$$\begin{aligned} a \Vdash T \rightarrow \mathbf{t} &\text{ iff } \forall b, b \Vdash T \Rightarrow b \cdot a \Vdash \mathbf{t} \\ & * \text{ iff } T \cdot a \Vdash \mathbf{t} \\ & \text{ iff } T \cdot a \leq i \\ & \text{ iff } a \leq T \Rightarrow i. \end{aligned}$$

□

Proposition 2. Soundness

$$\Delta \vdash \alpha \Rightarrow \Delta \vDash \alpha.$$

건전성 증명의 핵심은, 연역의 길이에 대한 귀납법을 사용하는 것.

- 공리가 진리를 보존하고,
- 추론규칙이 진리를 보존함을 보인다

⇒ 우리의 경우, **MICAL**에서 확장한 공리들의 진리 보존만 보임

Proof example: U-RUN

$$\begin{aligned} a \Vdash \alpha_u \text{ iff } & a \Vdash \alpha \text{ and } a \Vdash U \\ \text{iff } & a \Vdash \alpha \text{ and } a \leq u && \text{(Lemma 3)} \\ \Rightarrow & a = a_u \leq a_u \circ u. && \text{(U-RUN}^S\text{)} \end{aligned}$$

그런데 $u \leq u$ 이므로, $u \Vdash U$ 이고 따라서 $a \Vdash \alpha_u \& U$.

\Rightarrow 나머지 증명도 비슷합니다.

RDIV_U^w 의 경우 조금 더 까다롭지만, 여전히 기본 발상은 같습니다.

- **MICAL**의 완전성 증명은 이미 이루어졌다[Y18,Y19]
 - 주요 발상은, (i) **MICAL** 프레임을 **MICAL** 대수구조로 환원하고,
(ii) **MICAL** forcing을 **MICAL** 진리할당으로 변환하는 것
 - 동일한 접근이 UWAL에도 가능하다
- ⇒ 할 작업은 오직 (i)을 UWAL 프레임과 대수구조에 대해 확인하는 것

Proposition 3.

- (i) 완비 UWAL 프레임은 완비 선형 UWAL 대수
- (ii) 모든 UWAL 프레임은 UWAL 대수
- (iii) UWAL 어쿼트형 모형을 축소해 얻은 선형 UWAL 대수 상의 진리할당은 다음 관계를 갖는다:

$$a \Vdash \alpha \quad \text{iff} \quad a \leq vA(\alpha).$$

- (iv) 사실, $\max\{a \mid a \Vdash p\}$ 가 $vA(p)$ 와 동일하다.

개별 문장에 (iii)이 성립하는지는, **MICAL**과 동일하게 증명할 수 있다

마지막 과제는, Proposition 3을 증명하는 과정에서 얻은 프레임이 UWAL 프레임이 맞는지 확인하는 것 뿐

Proposition 4.

UF 가 UWAL 프레임이고,

각 공리 (Ax) 에 대응하는 프레임 조건을 $(Ax)_{UF}$ 라고 하자.

그러면 다음이 성립한다.

$UF \models (Ax)$ iff 프레임 조건 $(Ax)_{UF}$ 가 성립.

Proof of Proposition 4.

증명에 앞서, 다음 사실을 확인하자.

$\alpha^\circ := \max\{a \in UF \mid a \Vdash \alpha\}$ 라 두자. 그러면,

(i) $(\alpha \rightarrow \beta)^\circ = \alpha^\circ \Rightarrow \beta^\circ$ 이고,

(ii) $(\alpha \& \beta)^\circ = \alpha^\circ \cdot \beta^\circ$.

Proof example: A_U^S

정방향(\Rightarrow)은 대우로, 역방향(\Leftarrow)은 직접증명한다. 즉,

(i) UF 에서 A_U^S 가 성립하지 않는다면, $UF \not\models A_U$.

\Rightarrow 즉, $i \not\models A_U[p/\alpha, q/\beta]$ 의 사례 문장 p, q 를 찾아낸다.

(ii) UF 에서 A_U^S 가 성립한다면, $UF \models A_U$.

\Rightarrow 즉, A_U^S 가 성립하는 UF 에서, $i \models A_U$ 임을 보인다.

UF 에서 A_U^S 가 성립하지 않는다고 하자. 그럼 두 상태 $a, b \in UF$ 가 존재하여,

$$a_u \cdot b \not\leq a_u.$$

$p^*, q^* := a, b$ 로 정의한다.

만약 $i \Vdash p_U \ \& \ q \rightarrow p_U$ 였다면, $x \Vdash p_U \ \& \ q$ 가 $x \Vdash p_U$ 를 함축할 것.

$x := a_u \cdot b$ 를 선택한다.

$a_u \cdot b \Vdash p_U \ \& \ q$ 이므로, $a_u \cdot b \Vdash p_U$ iff $a_u \cdot b \leq (p_U)^* = a_u$.

이는 가정에 위배된다. 따라서 $UF \not\models A_U$.

역으로, UF 에서 A_U^S 가 성립한다고 하자. $i \Vdash A_U$ 임을 보여야 하므로,
 $a \Vdash \alpha_U \ \& \ \beta$ 로부터 $a \Vdash \alpha_U$ 를 이끌어낸다.

Proposition 3의 증명에 의하여,

$$\begin{aligned} a \Vdash \alpha_U \ \& \ \beta & \text{ iff } a \leq vA(\alpha_U \ \& \ \beta) = vA(\alpha)_u \cdot vA(\beta), \\ & \Rightarrow vA(\alpha)_u \cdot vA(\beta) \leq vA(\alpha)_u, \\ & \Rightarrow a \Vdash \alpha_U. \end{aligned} \tag{A_U^S}$$

따라서, Prop 3을 만족하는 프레임들이 UWAL 프레임임을 보였다.

Theorem 3.

- (i) UWAL은 UWAL 프레임 상에서 완전하다.
- (ii) UWAL은 완비 UWAL 프레임 상에서 완전하다.

4. Involutive extensions

Involutive extensions of UWALs

UWAL 논리 체계와 UWAL 프레임에 각각 다음 공리와 조건을 추가하면,
누승적 involutive 확장이 정의된다.

$$\neg\alpha := \alpha \rightarrow \mathbf{f}, \neg a := a \Rightarrow j.$$

$$(DNE) \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha,$$

$$(DNE^S) \neg\neg a \leq a.$$

⇒ Proposition 3과 거의 같은 방식으로, 누승적 확장도 완전하다.

5. Concluding remarks

- [Dunn76]에 따르면, R-mingle 연관 논리에 대한 relational semantics가 정의됨
- ⇒ weak-associativity가 고려되는 의미론은 고려되지 않음
- [Y17, Y22, Y24]에서는 다른 약결합 논리도 제시됨
- ⇒ 이들에 대해서도 어퀴트형 의미론을 제시할 수 있을 듯 함

감사합니다